Leçon 157 : Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Développements :

Cardinal du cône nilpotent, Décomposition de Dunford.

Bibliographie :

OA, Rombaldi, Mansuy-Mneimné, Gourdon, H2G2, Grifone, Berhuy.

Rapport du jury :

L'utilisation des noyaux itérés est fondamentale dans cette leçon, ceci pour déterminer si deux matrices nilpotentes sont semblables par exemple. Il est intéressant de présenter des conditions suffisantes de trigonalisation simultanée ; l'étude des endomorphismes cycliques a toute sa place dans cette leçon. Notons que l'étude des nilpotents en dimension 2 débouche naturellement sur des problèmes de quadriques et que l'étude sur un corps fini donne lieu à de jolis problèmes de dénombrement. S'ils le désirent, les candidats peuvent aussi présenter la décomposition de Frobenius.

1 Outils de trigonalisation

Définition 1 (Romb p594). *[OA p161] Le polynôme minimal de u est l'unique générateur de l'idéal des polynômes annulant u.*

Définition 2 (OA p163). *Polynôme caractéristique.*

Théoreme 3 (OA p163). *Théorème de Cayley-Hamilton.*

Définition 4. *Espace propre associé à une valeur propre.*

Proposition 5 (Mansuy). *[Romb p634] Le dimension de E_λ est $\leq$ la multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique.*

Théoreme 6. *Lemme des noyaux.*

2 Endomorphismes trigonalisables

2.1 Définitions et caractérisations

Définition 7 (Mansuy p93). *Endomorphisme trigonalisable. Matrice trigonalisable.*

Remarque 8 (Gourdon p164). *Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si sa matrice dans une base quelconque est trigonalisable.*

Proposition 9 (OA p166). *u est trigonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur scindé si et seulement si π_u est scindé si et seulement si χ_u est scindé.*

Remarque 10. *u est trigonalisable si et seulement si il stabilise un drapeau complet de E.*

Application 11 (Mansuy p94). *[Romb p668] Un endomorphisme induit est trigonalisable.*

Corollaire 12 (Mansuy p94). *Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.*

Exemple 13 (OA p167). *[Romb p667] Matrice trigonalisable sur $\mathbb{C}$ et pas sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 14 (Romb p748). *Si K est algébriquement clos, $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$.*

Application 15 (Romb p668). *Trace et déterminant en fonction des valeurs propres.*

Application 16 (Romb p594). *Si K est algébriquement clos, $Sp(P(u)) = P(sp(u))$.*

Contre exemple 17 (Romb p594). *Contre-exemple sur $\mathbb{R}$.*

2.2 Trigonalisation simultanée

Proposition 18 (Gourdon p166). *Si deux endomorphismes commutent, les espaces propres et l'image de l'un sont stables par l'autre.*

Proposition 19 (Gourdon p166). *Famille d'endomorphismes trigonalisables qui commutent deux à deux, base commune de trigonalisation.*

Contre exemple 20. $\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ *et* $\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$ *sont simultanément trigonalisables mais ne commutent pas.*

Proposition 21 (OA p168). *La somme et la composée (?) d'endomorphismes trigonalisables qui commutent est trigonalisable.*

Contre exemple 22. $\begin{matrix}1 & 1\\0 & 1\end{matrix}$ *et* $\begin{matrix}0 & 1\\1 & 1\end{matrix}$

$\begin{pmatrix}0 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$ *non trigonalisable.*

$\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}$ *non trigonalisable.*

Exemple 23 (OA p207). *$\phi_{U,V}(M) = UM - MV$ est trigonalisable si et seulement si U et V le sont.*

2.3 Topologie

Rombaldi p679

3 Endomorphismes nilpotents

3.1 Définitions et caractérisation

Définition 24 (Romb p671). *[OA p168] Endomorphisme nilpotent.*

Exemple 25 (OA p168). *Matrice nilpotente.*

Exemple 26 (OA p168). *La dérivation.*

Définition 27 (OA p168). *Ensemble N des matrices nilpotentes.*

Proposition 28 (OA p170). *Si u est nilpotent d'indice p, $\pi_u = X^p$.*

Remarque 29 (OA p170). *Par Cayley-Hamilton, $p \leq n$.*

Proposition 30 (OA p170). *u est nilpotent si et seulement si $\chi_u = (-1)^n X^n$.*

Proposition 31 (Gourdon p149). *[Romb p672] Il existe x tel que $(x, u(x), ..u^{q-1}(x))$ est une libre.*

Proposition 32 (OA p170). *u est nilpotente si et seulement si u est trigonalisable de spectre réduit à $\{0\}$.*

Contre exemple 33 (Romb p639). *Matrice de seule valeur propre 0 et non nilpotente.*

ou $\begin{matrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{matrix}$ *n'est pas nilpotente car de polynôme caractéristique $X(X^2+1)$.*

Proposition 34 (Romb 639). *[OA p171] En caractéristique nulle, u est nilpotente si et seulement si $\forall k$, $Tr(u^k) = 0$.*

Contre exemple 35. *En caractéristique non nulle p, les I_p^k sont nulles mais I_p n'est pas nilpotente.*

Remarque 36. *Suite des noyaux qui s'essoufflent.*

3.2 Blocs de Jordan et matrices nilpotentes

Définition 37 (OA p171). *Blocs de Jordan.*

Théoreme 38 (OA p172). *Théorème de Jordan pour les nilpotents.*

Application 39 (OA p172). *Caractériser les classes de conjugaison des endomorphismes nilpotents.*

Corollaire 40 (H2G2). *Le nombre de classe de similitude de N est égal au nombre de partitions de $dim(E)$.*

Exemple 41 (OA p173). *Matrices nilpotentes de rang 2 non semblables.*

Exemple 42 (Beruy).

3.3 Nature de N

Proposition 43 (OA p168). *N n'est pas stable par addition.*

Proposition 44 (OA p168). *N est stable par multiplication scalaire : c'est un cône.*

Exemple 45 (OA p169). *Cône en dimension 2. Dessin.*

Proposition 46 (OA p169). *Si deux endomorphismes nilpotents commutent alors leur somme est nilpotente.*

Proposition 47 (OA p169). *Si u est nilpotent et commute avec f alors $u \circ f = f \circ u$ est nilpotent.*

Proposition 48 (OA p169). *$vect(N) = ker(tr)$.*

4 Application à la réduction

4.1 Réduction selon les sous-espaces caractéristiques (Réduction en blocs triangulaires)

Définition 49 (Gri p184). *[Gourdon p192][Romb p603] Espace caractéristique.*

Proposition 50 (Gourdon p192). *E est somme directe des sous-espaces caractéristiques.*

Proposition 51 (Gri p184). *Les sous-espaces caractéristiques sont stables par u.*

Théoreme 52 (Gri p184). *Réduction selon les sous-espaces caractéristiques.*

Exemple 53 (Gri p186).

Application 54 (Gri p188). *Calcul de la puissance d'une matrice.*

4.2 Décomposition de Dunford

Proposition 55 (Gourdon p194). *Si $P = P_1^{\alpha_1}..P_r^{\alpha_r}$ et P est annulateur de u alors $E = \bigoplus ker(P_i^{\alpha_i}(u))$ et la projection sur $ker(P_i^{\alpha_i}(u))$ parallèlement à ... est un polynôme en u.*

Théoreme 56 (OA p164). *[Romb p603] Décomposition de Dunford.*

Application 57 (Romb). *Algorithme pour la décomposition de Dunford.*

Exemple 58 (Romb p606). *Matrice 3×3.*

Application 59 (OA p164). *Exponentielle et décomposition de Dunford.*

4.3 Réduction de Jordan

Théoreme 60. *Réduction de Jordan d'un endomorphisme trigonalisable.*

Exemple 61.